Über die Existenz normaler Supplemente in endlichen Gruppen

Von GERHARD PAZDERSKI und LUDWIG PROHASKA in Rostock (DDR)

Sei G eine endliche Gruppe, H Untergruppe von G, ferner $r_1, \ldots, r_n$ ein Rechtsrepräsentantensystem von G nach H, so daß also

$$G = Hr_1 \cup Hr_2 \cup \ldots \cup Hr_n$$

die Zerlegung von G in Rechtsnebenklassen nach H darstellt. Zu jedem Paar ν, h mit $\nu \in \{1, \ldots, n\}$, $h \in H$ gibt es ein $c_{\nu,h} \in H$ und ein $\nu h \in \{1, \ldots, n\}$, so daß

$$h^{-1} r_\nu h = c_{\nu,h} r_{\nu h}. \tag{1}$$

Hierbei ist $\nu \to \nu h$ eine Permutation der Menge $\{1, \ldots, n\}$ und das Erzeugnis C aller $c_{\nu,h}$ ein Normalteiler von H (s. KOCHENDÖRFFER [4]). C heißt auch die *Koeffizientengruppe* des Repräsentantensystems $r_1, \ldots, r_n$, welches übrigens im Falle $C=1$ ein *ausgezeichnetes Repräsentantensystem* genannt wird.

Ein solches ausgezeichnetes Repräsentantensystem existiert z. B. für eine abelsche Sylowgruppe H von G genau dann, wenn H in G ein normales Komplement besitzt, d.h. wenn ein Normalteiler N von G existiert mit $G=HN$, $H \cap N=1$ (s. KOCHENDÖRFFER [2]). Dies ist im wesentlichen der bekannte Satz von BURNSIDE, wonach eine Sylowgruppe normal komplementierbar ist, wenn sie im Zentrum ihres Normalisators liegt. Von diesem Ergebnis ausgehend sind eine Reihe von Untersuchungen angestellt worden, in denen unter veränderten Voraussetzungen über H, G und das Repräsentantensystem $r_1, \ldots, r_n$ die Existenz eines normalen Supplements zu H erschlossen wird, d.h. eines Normalteilers N von G mit $G=HN$, $H \cap N=C$. Im wesentlichen wurden hierbei folgende Beweismotive benutzt:

1. Verlagerungstheorie; d.h. der Übergang von einer gewissen monomialen Darstellung zur Determinantendarstellung (CHIH-HAN SAH [7], KOCHENDÖRFFER [2], [3]).
2. Fokalreihen im Sinne von HIGMAN [1], wobei gewisse Kommutatorbildungen eine Rolle spielen (KOCHENDÖRFFER [4]).

3. Gruppencharaktere, insbesondere die Möglichkeit der Fortsetzung gewisser Charaktere von H zu verallgemeinerten Charakteren von G (SUZUKI [8]).

Wir betrachten im Abschnitt I dieser Note eine Modifikation von 1., wobei Strukturvoraussetzungen über H ersetzt werden durch zusätzliche Voraussetzungen über das Repräsentantensystem. Als Anwendung verallgemeinern wir einen Satz von MIGLIORINI ([5], Satz 2). Die gewonnenen Resultate werden sodann im Abschnitt II mit Hilfe der unter 2. genannten Methode weiter verschärft, wobei sich eine zusammenfassende Verallgemeinerung von Sätzen von KOCHENDÖRFFER [4], S. 64, und PROHASKA [6], S. 286—287, ergibt.

G bezeichne stets eine Gruppe. Alle betrachteten Gruppen seien endlich. $H \leqq$ (bzw. $\trianglelefteq$) G kennzeichnet H als Untergruppe (bzw. Normalteiler) von G. $|G|$ bezeichnet die Ordnung von G, $|G:H|$ den Index der Untergruppe H in G. Durch $\langle A\rangle$ wird die aus dem Komplex A erzeugte Untegruppe bezeichnet. Schließlich bedeutet (A, B) die aus allen Kommutatoren $(a, b)=a^{-1}b^{-1}ab$ mit $a\in A$, $b\in B$ erzeugte gegenseitige Kommutatorgruppe der Komplexe A, B.

I. Sei

$$s \to \mathbf{A}(s) \quad (s\in H) \tag{2}$$

eine monomiale Darstellung von H über dem komplexen Zahlkörper, deren Kern K die Koeffizientengruppe C des Repräsentantensystems $r_1, \dots, r_n$ von H in G umfassen möge. Die durch (2) induzierte Darstellung von G ist

$$s \to \mathbf{A}^G(s) = \|\mathbf{A}(r_\mu s r_\nu^{-1})\|_{\mu,\nu} \quad (s\in G),$$

wobei wie üblich $\mathbf{A}(r_\mu s r_\mu^{-1})$ die Nullmatrix sein soll, wenn $r_\mu s r_\nu^{-1}\notin H$. Zu gegebenem Paar μ, s mit $\mu\in\{1, \dots, n\}$, $s\in G$ gibt es genau ein ν mit $r_\mu s r_\nu^{-1}\in H$. Wir schreiben $\nu=\mu s$ und erhalten damit eine Permutation $\mu\to\mu s$ der Menge $\{1, \dots, n\}$, die für $s\in H$ mit der durch (1) gegebenen Permutation übereinstimmt.

Es soll nun vorausgesetzt werden, daß die von der Nullmatrix verschiedenen Matrizen $\mathbf{A}(r_\mu s r_{\mu s}^{-1})$ bei festem s aber beliebigem μ gleichgestaltet sind in dem Sinne, daß die von Null verschiedenen Koeffizienten bei allen diesen Matrizen an denselben Stellen stehen. Dies tritt genau dann ein, wenn die in H gelegenen Elemente $r_\mu s r_{\mu s}^{-1}$ ($\mu=1, \dots, n$; s fest) in derselben Nebenklasse von A liegen, wo A definiert ist durch

$$A = \{s | s\in H,\ \mathbf{A}(s) = \text{Diagonalmatrix}\}. \tag{3}$$

A erfährt bei (2) eine Darstellung durch Diagonalmatrizen mit dem Kern K. Daher sind die Koeffizienten von $\mathbf{A}(s)$ für $s\in A$ sämtlich $|A:K|$-te Einheitswurzeln. Wir bilden nun für $s\in G$ folgende Matrix $\mathrm{B}(s)$: Das Format von $\mathrm{B}(s)$ sei gleich dem von $\mathbf{A}(s)$ in (2); an der Stelle $\varkappa$, λ stehe in $\mathrm{B}(s)$ das Produkt der in allen Matrizen

$\mathbf{A}(r_\mu s r_{\mu s}^{-1})$ $(\mu=1, \ldots, n)$ an dieser Stelle befindlichen Koeffizienten. Offensichtlich ist $\mathbf{B}(s)$ monomial. Man rechnet leicht nach, daß

$$(4) \qquad s \to \mathbf{B}(s) \quad (s \in G)$$

eine Darstellung von G ist. Ihr Kern möge mit N bezeichnet werden. Für $s \in H$ gilt $r_\mu s r_{\mu s}^{-1} = s c_{\mu, s}$, so daß $\mathbf{A}(r_\mu s r_{\mu s}^{-1}) = \mathbf{A}(s)\mathbf{A}(c_{\mu,s}) = \mathbf{A}(s)$. Also ist für $s \in H$ $\mathbf{B}(s) = \mathbf{A}^{|G:H|}(s)$, wo $\mathbf{A}^{|G:H|}(s)$ aus der Matrix $\mathbf{A}(s)$ dadurch entsteht, daß man deren Koeffizienten sämtlich in die $|G:H|$-te Potenz erhebt.

Setzen wir weiterhin voraus, daß $|G:H|$ zu $|A:K|$ teilerfremd ist, dann hat die Beschränkung von (4) auf H den Kern K, d.h. es gilt

$$(5) \qquad H \cap N = K.$$

Denn aus $s \in K$ folgt $\mathbf{A}(s) = \mathbf{E}$ (=Einheitsmatrix) und daraus $\mathbf{B}(s) = \mathbf{A}^{|G:H|}(s) = \mathbf{E}$. Umgekehrt liefern $s \in H$ und $\mathbf{B}(s) = \mathbf{E}$ die Beziehung $\mathbf{A}^{|G:H|}(s) = \mathbf{E}$. Danach ist $\mathbf{A}(s)$ eine Diagonalmatrix, in deren Diagonale lauter $|G:H|$-te Einheitswurzeln stehen. Dann ist aber $s \in A$, so daß die in der Diagonale von $\mathbf{A}(s)$ befindlichen Koeffizienten zugleich $|A:K|$-te Einheitswurzeln sind. Wegen $(|G:H|, |A:K|) = 1$ muß also $\mathbf{A}(s) = \mathbf{E}$ sein, was $s \in K$ nach sich zieht. Wir wollen nun zeigen, daß $G = HN$. Es genügt hierfür $|G:N| \leqq |H:K|$ nachzuweisen, denn das gibt mit (5) auf Grund des Isomorphiesatzes die Beziehung $|G:N| \leqq |HN:N|$, also $G \leqq HN$. Analog zu A definieren wir

$$B = \{s \mid s \in G, \ \mathbf{B}(s) = \text{Diagonalmatrix}\}.$$

Werden in $\mathbf{A}(s)$ alle von Null verschiedenen Koeffizienten durch 1 ersetzt, so erhält man eine Permutationsmatrix $\mathbf{A}^*(s)$ und die Abbildung $\mathbf{A}(s) \to \mathbf{A}^*(s)$ ist ein Homomorphismus, dessen Kern aus den Diagonalmatrizen $\mathbf{A}(s)$ $(s \in A)$ besteht. Da also $s \to \mathbf{A}^*(s)$ $(s \in H)$ eine Darstellung von H mit dem Kern A ist, gilt $H/A \cong \mathbf{A}^*(H)$. Entsprechend verfahren wir mit B und erhalten $G/B \cong \mathbf{B}^*(G)$. Auf Grund der Bildung von $\mathbf{B}(s)$ stimmen aber die Permutationsmatrizen $\mathbf{A}^*(H)$ und $\mathbf{B}^*(G)$ überein. Damit steht zunächst fest, daß

$$G/B \cong H/A$$

und übrig bleibt die Behauptung $|B:N| \leqq |A:K|$. Offenbar ist $B/N \cong \mathbf{B}(B)$, $A/K \cong \mathbf{A}(A)$ Die Behauptung folgt nun aus der sogleich zu beweisenden Beziehung $\mathbf{B}(B) \leqq \mathbf{A}(A)$ Für $s \in B$ ist $\mathbf{B}(s)$ Diagonalmatrix, etwa

$$\mathbf{B}(s) = \left\| \begin{matrix} \beta_1(s) & & & \\ & \beta_2(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_m(s) \end{matrix} \right\|.$$

Aus der Bildungsvorschrift von $\mathbf{B}$ ergibt sich, daß die Matrizen $\mathbf{A}(r_\mu s r_{\mu s}^{-1})$ sämtlich Diagonalgestalt haben müssen und daß

$$(6) \qquad \mathbf{B}(s) = \mathbf{A}(r_1 s r_{1s}^{-1})\mathbf{A}(r_2 s r_{2s}^{-1}) \dots \mathbf{A}(r_n s r_{ns}^{-1})$$

gilt. Aus der Diagonalgestalt von $\mathbf{A}(r_\mu s r_{\mu s}^{-1})$ folgt $r_\mu s r_{\mu s}^{-1} \in A$ für $\mu = 1, \dots, n$, wonach auch

$$t = r_1 s r_{1s}^{-1} r_2 s r_{2s}^{-1} \dots r_n s r_{ns}^{-1}$$

ein Element von A ist. (6) liefert nun

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{A}(t).$$

Damit ist $\mathbf{B}(B) \leqq \mathbf{A}(A)$ bewiesen.

Die Eigenschaft, daß die $r_\mu s r_{\mu s}^{-1}$ bei festem s und beliebigem μ alle in derselben Nebenklasse von A liegen, wollen wir mit Hilfe von (1) etwas umformen. Sie ist zunächst gleichwertig mit

$$r_\mu s r_{\mu s}^{-1}(r_\nu s r_{\nu s}^{-1})^{-1} \in A$$

für alle $\mu, \nu \in \{1, \dots, n\}$, $s \in G$. Setzen wir $s = h r_\lambda$ $(h \in H)$, so können wir dafür schreiben

$$h^{-1} r_\mu h r_\lambda r_{\mu h r_\lambda}^{-1} r_{\nu h r_\lambda} r_\lambda^{-1} h^{-1} r_\nu^{-1} h \in h^{-1} A h.$$

Wegen (1) und $C \leqq A \trianglelefteq H$ ist dies gleichwertig mit

$$r_{\mu h} r_\lambda r_{\mu h r_\lambda}^{-1} r_{\nu h r_\lambda} r_\lambda^{-1} r_{\nu h} \in A.$$

Ersetzen wir hierin μh durch μ, νh durch ν so kommt

$$(7) \qquad r_\mu r_\lambda r_{\mu r_\lambda}^{-1} r_{\nu r_\lambda} r_\lambda^{-1} r_\nu^{-1} \in A \quad \text{für} \quad \lambda, \mu, \nu \in \{1, \dots, n\}.$$

Nehmen wir an, daß r_1 der in H gelegene Repräsentant ist, so ergibt $r_1 r_\lambda r_{1 r_\lambda}^{-1} \in H$, daß $1 r_\lambda = \lambda$, bzw. $r_{1 r_\lambda} = r_\lambda$. Aus (7) erhalten wir $r_\mu r_\lambda r_{\mu r_\lambda}^{-1} r_1^{-1} \in A$ für $\nu = 1$. Die Bedingungen

$$(8) \qquad r_1 \in H, \quad r_\mu r_\lambda r_{\mu r_\lambda}^{-1} r_1^{-1} \in A \quad \lambda, \mu = 1, \dots, n,$$

welche in der Form

$$r_\mu r_\lambda r_{\mu r_\lambda}^{-1} \in A r_1 \leqq H \quad \lambda, \mu = 1, \dots, n$$

besagen, daß alle $r_\mu r_\lambda r_{\mu r_\lambda}^{-1}$ in der Nebenklasse $A r_1$ von A in H liegen, sind mit (7) gleichwertig, denn aus (8) folgt

$$(r_\mu r_\lambda r_{\mu r_\lambda}^{-1} r_1^{-1})(r_\nu r_\lambda r_{\nu r_\lambda}^{-1} r_1^{-1})^{-1} \in A$$

und das ist gerade (7).

Die bisherigen Betrachtungen verhelfen uns zu folgendem

Satz 1. *Sei $H \leqq G$ und $r_1, \ldots, r_n$ ein Repräsentantensystem von G nach H mit der Koeffizientengruppe C. Ferner seien A, K Untergruppen mit den Eigenschaften:*
$H \geqq A \geqq K \geqq C$ ist Normalteilerkette von H, A/K ist abelsch,
$(|G:H|, |A:K|) = 1$, (8) ist erfüllt.

Dann besitzt G einen Normalteiler N mit $G = HN$, $H \cap N = K$.

Beweis. Man gehe aus von einer treuen Darstellung der abelschen Gruppe A/K durch Diagonalmatrizen, die ja immer existiert. Aus ihr kann man in natürlicher Weise eine Darstellung von A durch Diagonalmatrizen mit dem Kern K gewinnen. Die durch sie induzierte Darstellung von H sei $s \to \mathrm{A}(s)$. Sie ist offenbar monomial, hat ebenfalls den Kern K und erfüllt (3). Nunmehr ergibt sich die Behauptung von Satz 1 aus den bis dahin durchgeführten Untersuchungen.

Bemerkungen. 1. Für $A = H$ ist (8) trivialerweise erfüllt.

2. Haben alle Elemente $r_\mu r_\lambda r_{\mu r_\lambda}^{-1} r_1^{-1}$ $(r_1 \in H)$, die ja von vornherein in H liegen, eine zu $|H:A|$ teilerfremde Ordnung, dann liegen sie in A, so daß also auch hier (8) erfüllt ist.

Für eine Gruppe G und eine Primzahlmenge π soll unter $G(\pi)$ der Durchschnitt aller derjenigen Normalteiler von G verstanden werden, deren Indizes unter G höchstens Primteiler aus π haben. Es ist also $G/G(\pi)$ die größte π-Faktorgruppe von G oder auch $G(\pi)$ das Erzeugnis aller π'-Elemente von G, wo π' die zu π komplementäre Primzahlmenge bezeichnet.

In Verallgemeinerung eines Satzes von Kochendörffer ([3], Satz 1) zeigte Migliorini ([5], Satz 2), daß unter der Voraussetzung $(|G:H|, |H:K|) = 1$ bereits aus der Auflösbarkeit von H/K die Existenz eines Normalteilers N von G mit $G = HN$, $H \cap N = K$ folgt, wenn nur $\langle r_1, \ldots, r_n \rangle \leqq KG(\pi)$, wo π die Primteilermenge von $|H:K|$ ist; übrigens ist dann notwendig $N = KG(\pi)$. Wir werden nun, ausgehend von Satz 2, hiervon eine Verallgemeinerung geben.

Satz 2. *Sei $H \leqq G$ und $r_1, \ldots, r_n$ ein Repräsentantensystem von G nach H mit der Koeffizientengruppe C. Es gebe eine Untergruppenkette*

$$G \geqq H = H_0 \geqq A_0 \geqq H_1 \geqq A_1 \geqq \ldots \geqq H_k \geqq A_k \geqq H_{k+1} = K \geqq C$$

mit den Eigenschaften:

alle H_i sind normal in H,

$A_i \trianglelefteq H_i$ für $i = 0, \ldots, k$,

A_i/H_{i+1} ist abelsch für $i = 0, \ldots, k$,

$r_\iota \in H$ und alle $r_\mu r_\lambda r_{\mu r_\lambda}^{-1} r_\iota^{-1}$ sind π_1'-Elemente, wo π_1 die Gesamtheit aller in den $|H_i:A_i|$, $i=0, \dots, k$ enthaltenen Primteiler ist,

$\langle r_1, \dots, r_n\rangle \leqq G(\pi_2)$, wo π_2 die Gesamtheit aller in den $|A_i:H_{i+1}|$, $i=0, \dots, k$ enthaltenen Primzahlen ist,

$|G:H|$ hat keinen Primteiler aus π_2,

π_1 ist Teilmenge von π_2.

Dann gibt es einen Normalteiler N von G mit $G=HN$, $H\cap N=K$.

Beweis. Wir wenden Induktion nach k an. Für $k=0$ ergibt sich die Existenz eines Normalteilers G_1 von $G_0=G$ mit $G_0=H_0G_1$, $H_0\cap G_1=H_1$ aus Satz 1 mit Bemerkung 2, wenn dort unter Beibehaltung des Repräsentantensystems $r_1, \dots, r_n$ für G, H, A, K bzw. G_0, H_0, A_0, H_1 genommen werden. Sei nun $k>0$ und bis $k-1$ der Satz als richtig erkannt. Dann existiert ein Normalteiler G_k von G mit $G_0=H_0G_k$, $H_0\cap G_k=H_k$. Wegen $G_0/G_k\cong H_0/H_k$ und $\pi_1\subseteqq\pi_2$ ist G_0/G_k eine π_2-Gruppe. Folglich haben wir $\langle r_1, \dots, r_n\rangle\leqq G(\pi_2)\leqq G_k$. Wegen $|G_k:H_k|=|G_0:H_0|=n$ und $H_0\cap G_k=H_k$ ist $r_1, \dots, r_n$ ein Repräsentantensystem von G_k nach H_k mit einer in C gelegenen Koeffizientengruppe. Wir können wieder Satz 1 anwenden und zwar mit G_k, H_k, A_k, H_{k+1} an Stelle von G, H, A, K. Danach gibt es einen Normalteiler G_{k+1} von G_k mit $G_k=H_kG_{k+1}$, $H_k\cap G_{k+1}=H_{k+1}$. Es ist $G_0=H_0G_k=H_0H_kG_{k+1}=H_0G_{k+1}$, $H_0\cap G_{k+1}=H_0\cap G_k\cap G_{k+1}=H_k\cap G_{k+1}=H_{k+1}$. Nun müssen wir noch zeigen, daß $G_{k+1}\trianglelefteq G_0$. Wegen $G_{k+1}\trianglelefteq G_k\trianglelefteq G_0$ ist G_{k+1} subnormal in G_0. Da G_0/G_k und $G_k/G_{k+1}\cong$ $\cong H_k/H_{k+1}$ beides π_2-Gruppen sind, besitzt $|G:G_{k+1}|$ nur Primteiler aus π_2. Dies liefert zusammen mit der Subnormalität von G_{k+1} in G, daß $G(\pi_2)\leqq G_{k+1}$. Folglich gilt $\langle r_1, \dots, r_n\rangle\leqq G_{k+1}$. Wegen $|G_{k+1}:H_{k+1}|=|G_k:H_k|=n$ und $H_0\cap G_{k+1}=H_{k+1}$ ist wieder $r_1, \dots, r_n$ ein Repräsentantensystem von G_{k+1} nach H_{k+1}. Damit haben wir $G_{k+1}=$ $=\langle H_{k+1}, r_1, \dots, r_n\rangle$. Für $h\in H_0$ ist nach (1) wegen $C\leqq H_{k+1}$ sicher $h^{-1}r_\nu h\in G_{k+1}$; außerdem ist $h^{-1}H_{k+1}h\leqq H_{k+1}\leqq G_{k+1}$, da nach Voraussetzung $H_{k+1}\trianglelefteq H_0$. Der Normalisator von G_{k+1} umfaßt somit H_0, und da er auch G_{k+1} umfaßt, enthält er $H_0G_{k+1}=G_0$. In $G_{k+1}=N$ haben wir einen Normalteiler der gewünschten Art gefunden.

Aus Satz 2 erhält man den erwähnten Satz von Migliorini, indem man $A_i=H_i$ setzt für $i=0, \dots, k$.

II. Wir koppeln nun die in I geschilderte Methode mit hyperfokalen Betrachtungen und erhalten so verallgemeinerte Aussagen über die Existenz normaler Supplemente. Es wird sich darum handeln, in Satz 1 die Aussage der Kommutativität von A/K abzuschwächen.

Für zwei Untergruppen U, V einer Gruppe bezeichne $(U, V)^*$ die aus allen in U gelegenen Kommutatoren $(u, v)=u^{-1}v^{-1}uv$ $(u\in U, v\in V)$ erzeugte Untergruppe von U.

D. G. HIGMAN definiert ind [1] für eine U ergruppe U der Gruppe G die *Fokalreihe* $U_0\geqq U_1\geqq U_2\geqq\ldots$ von U in G ut heh dieFestsetzung $U_0=U$, $U_{i+1}=(U_i, G)^*$, $i=0, 1, \ldots$. Wenn einmal $U_k=1$, sorcnißt U *hyperfokal* in G. Ist $U\trianglelefteq G$, so deckt sich die Fokalreihe von U in G mit der Reihe der iterierten Kommutatorgruppen U, (U, G), $((U, G), G)$, $(((U, G), G), G)$, $\ldots$. Statt „U ist hyperfokal in G" könnte man hier auch sagen „U ist nilpotent eingebettet in G". Ist G eine Gruppe mit dem Operatorenbereich Ω, so können wir allgemeiner die absteigende Ω-Kette $G_0\geqq G_1\geqq\geqq G_2\geqq\ldots$ von G definieren durch $G_0=G$, $G_{i+1}=\langle x^{-1}x^{\omega}\,|\,x\in G_i, \omega\in\Omega\rangle$ und weiter G *Ω-nilpotent* nennen, wenn einmal $G_k=1$. Ist $G\geqq L\geqq K$ eine Normalteilerkette von G, so kann man die Elemente g aus G gemäß $(xK)^g=g^{-1}xgK$ $(x\in L)$ in natürlicher Weise als Operatoren auf L/K wirken lassen. Faßt man in dieser Weise G als Operatorenbereich für L/K auf, so ist die G-Nilpotenz von L/K gleichwertig damit, daß ein Glied der Fokalreihe $L\geqq(L, G)\geqq((L, G), G)\geqq\ldots$ in K liegt.

Neben dem Begriff der Fokalreihe benötigen wir noch den Begriff der Fokalkette. Die Untergruppenreihe $S_0\geqq S_1\geqq S_2\geqq\ldots$ heißt *Fokalkette* in G, wenn $(S_i, G)^*\leqq\leqq S_{i+1}$ für $i=0, 1, \ldots$. Gibt es eine mit S beginnende Fokalkette von G, welche die Untergruppe T enthält, so nennt man T *verkettet* mit S in G. Wir benötigen beim Beweis des nächsten Satzes das folgende von HIGMAN in [1], S. 487 bewiesene

Lemma. *Ist die Untergruppe T verkettet mit S in G, ferner π eine Primzahlmenge, welche alle Primteiler von $|S:T|$ aber keinen Primteiler von $|G:S|$ enthält, dann gilt $G=SG(\pi)$, $S\cap G(\pi)\leqq T$.*

Wir zeigen nun in Verallgemeinerung von Satz 1 den

Satz 3. *Sei $H\leqq G$ und $r_1, \ldots, r_n$ ein Repräsentantensystem von G nach H mit der Koeffizientengruppe C. Ferner seien A, L, K Untergruppen mit den Eigenschaften:*

$H\geqq A\geqq L\geqq K\geqq C$ ist Normalteilerkette von H,

A/L ist abelsch, L/K ist H-nilpotent,

$(|G:H|, |A:K|)=1$,

(8) *ist erfüllt.*

Dann besitzt G einen Normalteiler N mit $G=HN$, $H\cap N=K$.

Beweis. Nach Satz 1 gibt es zunächst einen Normalteiler N_0 von G mit $G=HN_0$, $H\cap N_0=L$. Aus der Fokalreihe $L_0\geqq L_1\geqq\ldots$ von L in H, von der ja nach Voraussetzung ein Glied in K enthalten ist, bilden wir durch die Festsetzung $K_i=L_iK$ für $i=1, 2, \ldots$ die Reihe

$$L = K_0 \geqq K_1 \geqq \ldots \geqq K_m = K$$

und behaupten, daß

$$(9) \qquad (K_i, G)^* \leqq K_{i+1}, \quad \text{für} \quad i = o, \ldots, m-1.$$

Wenn ein Kommutator

$$(k_i, g) = k_i^{-1}g^{-1}k_ig \quad (k_i \in K_i, \quad g \in G),$$

den man auf Grund der möglichen Darstellung $g=r_\nu^{-1}h$ ($h\in H$, $\nu\in\{1, \ldots, n\}$) unter Beachtung von (1) und $C\trianglelefteq H$ schreiben kann als

$$(k_i, g) = k_i^{-1}h^{-1}r_\nu k_i r_\nu^{-1}h = k_i^{-1}h^{-1}k_ic_1r_\mu r_\nu^{-1}h = k_i^{-1}h^{-1}k_ihc_2c_3r_\varkappa r_\lambda^{-1}c_4$$

mit gewissen $\varkappa, \lambda, \mu\in\{1, \ldots, n\}$ und $c_1, c_2, c_3, c_4\in C$, in K_i liegt, dann ist $r_\varkappa=r_\lambda$ und $(k_i, h)\in K_i$, folglich $(k_i, h)\in(K_i, H)^*=(K_i, H)$. Demnach folgt aus $(k_i, g)\in K_i$ sicher $(k_i, g)\in(K_i, H)K=(L_iK, H)K=(L_i, H)(K, H)K=L_{i+1}K=K_{i+1}$, womit (9) bewiesen ist.

Aus (9) folgt insbesondere $(K_i, N_0)^*\leqq K_{i+1}$ für $i=0, \ldots, m-1$. Also ist K mit L verkettet in N_0. Da überdies $|N_0:L|=|G:H|=n$ und n zu $|L:K|$ teilerfremd ist, gilt nach dem zitierten Lemma $N_0=LN_0(\pi)$, $L\cap N_0(\pi)\leqq K$, unter π die Menge der Primteiler von $|L:K|$ verstanden. Wir haben $G=HN_0=HLN_0(\pi)=HN_0(\pi)$, sowie $H\cap N_0(\pi)=H\cap N_0\cap N_0(\pi)=L\cap N_0(\pi)\leqq K$. Da $N_0\trianglelefteq G$ und $N_0(\pi)$ charakteristische Untergruppe von N_0 ist, gilt $N_0(\pi)\trianglelefteq G$. Nun ist $N=KN_0(\pi)$ ein Normalteiler der verlangten Art. Denn H normalisiert sowohl K als auch $N_0(\pi)$ mithin N, so daß $N\trianglelefteq HN=G$; weiter ist offenbar $H\cap N=K$.

Setzen wir in Satz 3 $H=A$, so erhalten wir als Spezialfall den

Satz 4. *Sei $H\leqq G$, ferner $H\geqq L\geqq K$ eine Normalteilerkette von H, derart daß K die Koeffizientengruppe eines Repräsentantensystems von G nach H umfaßt, H/L abelsch und L/K H-nilpotent ist. Ferner sei* $(|G:H|, |H:K|)=1$. *Dann besitzt G einen Normalteiler N mit $G=HN$, $H\cap N=K$.*

Dies ist eine Verallgemeinerung von Kochendörffer [4], Theorem S. 64, welches mit dem aus Satz 4 für $H=L$ entstehenden Spezialfall übereinstimmt.

Der wesentliche Schluß beim Beweis von Satz 3 besteht in der Anwendung des Higmanschen Lemmas auf N_0, wobei die Herkunft von N_0 belanglos ist. Dies ermöglicht eine gemeinsame Verallgemeinerung des soeben genannten Satzes von Kochendörffer und des folgenden Satzes von Prohaska ([6], S. 286—287):

Ist $G \geqq H \trianglerighteq K$, in K die Koeffizientengruppe eines Repräsentantensystems von G nach H enthalten, H/K Sylowturmgruppe sowie $(|G:H|, |H:K|) = (|H:K|, |K:1|) = 1$, dann besitzt G einen Normalteiler N mit $G = HN$, $H \cap N = K$.

Satz 5. *Sei $G \geqq H \geqq L \geqq K$ und dabei L sowie K normal in H. K umfasse die Koeffizientengruppe eines Repräsentantensystems von G nach H. Weiter sei H/L Sylowturmgruppe, L/K H-nilpotent und $(|G:H|, |H:K|) = (|H:L|, |L:1) = 1$. Dann gibt es einen Normalteiler N von G mit $G = HN$, $H \cap N = K$.*

Beweis. Wir können den Beweis von Satz 3 wörtlich übernehmen, nur daß zu Beginn des Beweises statt Satz 1 der zitierte Satz von PROHASKA zu verwenden ist.

Literatur

[1] D. G. HIGMAN, Focal series in finite groups, *Canad. J. Math.*, **5** (1953), 477—497.

[2] R. KOCHENDÖRFFER, Ein Satz über Sylowgruppen, *Math. Nachr.*, **17** (1959), 189—194.

[3] R. KOCHENDÖRFFER, Hallgruppen mit ausgezeichnetem Repräsentantensystem, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 218—223.

[4] R. KOCHENDÖRFFER, On supplements in finite groups, *J. Austr. Math. Soc.*, **3** (1963), 63—67.

[5] F. MIGLIORINI, Rappresentanti di laterali e supplementi in un gruppo finito, *Le Matematiche*, Catania, **21** (1966), 11—17.

[6] L. PROHASKA, Über Supplements in endlichen Gruppen, *Acta Sci. Math.*, **30** (1969), 285—288.

[7] CHIH-HAN SAH, Existence of normal complements and existension of characters in finite groups, *Illinois J. Math.*, **6** (1962), 282—291.

[8] M. SUZUKI, On the existence of a Hall normal subgroup, *J. Math. Soc. Japan*, **15** (1963), 387—391.

(Eingegangen am 11. Dezember, 1972)